

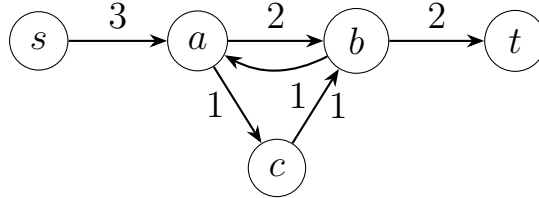
КОНСПЕКТ ПО МСМФ

Покорский Никита

2026

Декомпозиция потока

Декомпозицией потока будем называть его представление в виде суммы потоков вдоль простых s - t путей и ориентированных циклов.



s - t -путь и ориентированный цикл

Лемма 1.1

Всякий поток имеет декомпозицию.

Доказательство. Будем вести индукцию по числу рёбер с положительным потоком. Если таких рёбер нет, то утверждение очевидно.

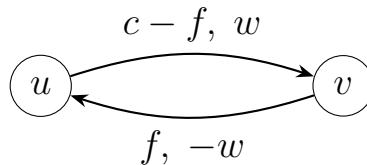
Пусть поток не нулевой. Тогда из s идёт насыщенное ребро. Начнем идти по рёбрам с положительным потоком. Будем продолжать такие действия, пока не придём в посещённую вершину или в t . Если мы пришли в t , то мы получим s - t -путь. Вдоль него отменим поток, равный минимальной величине потока, протекающего по рёбрам данного пути. Если же пришли в посещённую вершину, то мы получили цикл и некоторый путь до него. Давайте также вдоль цикла отменим поток по аналогии с путём.

Если поток имел нулевую величину и при этом было насыщенное ребро, то мы имеем дело с циркуляцией. Давайте выберем ребро на ней и начнём движение. В один момент мы замкнёмся. Мы свели всё к случаю с циклом.

После чего остаточная сеть также будет потоком. Но число насыщенных рёбер в ней уменьшится. По индукции в остаточной сети есть декомпозиция. $\square$

Теория по МСМФ

Мы уже познакомились с теорией по потокам и хотим слегка модифицировать ту задачу, которую научились решать. А именно: давайте каждому ребру добавим дополнительную характеристику в виде стоимости, которую мы будем платить за то, что пропускаем единицу потока вдоль ребра. Кроме того, вы уже знаете, что просто жадный алгоритм не работает, тогда давайте так же, как и в прошлый раз вводить обратные рёбра. Тогда стоимость вдоль обратного рёбра будет равна минус стоимости прямого ($w_{uv} = -w_{vu}$).



прямое и обратное рёбра остаточной сети

В введённой терминологии стоимость потока будет оцениваться следующим образом:

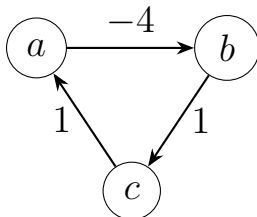
$$\sum_{(u,v) \in E} f_{uv} \cdot w_{uv}$$

Будем учиться решать задачу поиска максимального потока минимальной стоимости, более формально мы будем пытаться экстремализировать следующие линейные функционалы:

$$\sum_{(u,v) \in E} f_{uv} \rightarrow \max$$

$$\sum_{(u,v) \in E} f_{uv} \cdot w_{uv} \rightarrow \min$$

Кроме того, на текущий момент мы будем предполагать, что в транспортной сети нет циклов отрицательного веса. Ну действительно, если это не так, то мы можем вдоль них пропустить поток, причём приращение потока будет 0 (в силу того, что получим циркуляцию), но стоимость при этом уменьшится, согласитесь, странно?



$$\Delta|f| = 0, \quad \Delta \text{cost} = -2$$

Лемма 2.1: Критерий минимальности потока величины k

Поток f , такой, что $|f| = k$, является минимальным по стоимости при данной величине $k \iff$ в остаточной сети нет циклов отрицательного веса

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим противное: в остаточной сети есть цикл отрицательного веса. Пропустим по нему положительное число потока. Стоимость уменьшилась, однако величина не изменилась. Противоречие с минимальностью.

($\Leftarrow$) Обозначим за f — текущий поток, а f^* — минимальный по стоимости поток такой же величины. Рассмотрим $g = f^* - f$. На прошлой лекции мы показали, что разность двух потоков тоже поток. Однако в силу того, что $|f| = |f^*|$, $|g| = 0$. Тогда g состоит из циркуляций. По индукции по числу рёбер легко показать, что всякая циркуляция разбивается на объединение циклов. Тогда в силу того, что все циклы неотрицательны, и вес всей циркуляции неотрицателен. Отсюда получаем, что стоимость $f \leq f^*$, тогда по предположению минимальности f^* стоимость $f =$ стоимость f^* . $\square$

Лемма 2.2: Проталкивание потока по кратчайшему пути

Если пропустить поток вдоль кратчайшего s – t -пути в сети, то в остаточной сети не появится циклов отрицательного веса.

Доказательство. Давайте пока просто поверим в эту лемму. Чуть позже с уже новой теорией нам получится её доказать в два действия. $\square$

SPFA

Пользуясь введёнными леммами, мы можем получить наивный алгоритм поиска потока минимальной стоимости. Давайте искать Фордом–Беллманом минимальный s – t -путь в остаточной сети и вдоль него пускать единицу потока. Наверное, многие из вас уже знают о существовании Форда–Беллмана с очередью, однако на всякий случай напомним код для него: [<https://pastebin.com/gwj6PQEC>]

Стоит также отметить, что иногда замена очереди на стек может ускорить работу алгоритма. Несложно видеть, что время работы нашего алгоритма составляет $\mathcal{O}(nmC)$, где C — величина потока.

Оптимизация алгоритма

В лучших традициях, если мы хотим ускорить Форда–Беллмана, то мы заменим его на Дейкстру. Однако внимательный слушатель может заметить, что в нашем графе присутствуют рёбра отрицательного веса. Для борьбы с этим введём новую теорию.

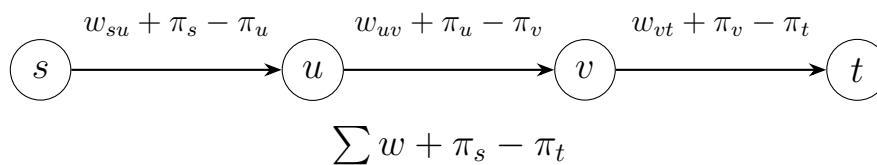
Потенциалом Джонсона вершины будем называть некоторую численную характеристику π_v , которая обладает следующим свойством: $\forall(u, v) \in E : w_{uv} + \pi_u - \pi_v \geq 0$. По введённым потенциалам построим новый граф, в котором ребро (u, v) исходного графа будет иметь стоимость $w^* = w_{uv} + \pi_u - \pi_v \geq 0$, ее будем называть приведенной стоимостью ребра

Сделаем пару полезных замечаний касательно этого:

Лемма 4.1: Минимальный путь с учётом потенциала

После введения потенциалов минимальный путь в нашем графе будет также минимальным и в исходном.

Доказательство. Давайте посмотрим на сумму рёбер в новом графе вдоль некоторого пути. Несложно видеть, что потенциалы вершин телескопируются. И тогда $len(path)^* = len(path) + \pi_s - \pi_t$. Тогда если s – t -путь в таком графе будет минимальным, то он будет минимальным и в исходном графе.



□

Лемма 4.2: Существование потенциала

$\forall v \in V \exists \pi_v \Leftrightarrow$ в графе нет циклов отрицательного веса

Доказательство. ($\Rightarrow$) Рассмотрим некоторый цикл в графе и просуммируем стоимости рёбер на нем.

$$0 \leq \sum_{(u,v) \in C} w_{uv} + \pi_u - \pi_v = \sum_{(u,v) \in C} w_{uv}$$

Последнее равенство следует из того, что потенциалы вдоль рёбер телескопируются.

($\Leftarrow$) Заметим, что кратчайшее расстояние до каждой вершины от s является валидным потенциалом. Действительно, в силу того, что в нашем графе нет отрицательных циклов, то оно конечно. С другой стороны, очевидно, что:

$$\forall (u, v) \in E : d_v \leq d_u + w_{uv}$$

И равенство достигается только при условии, что ребро лежит на кратчайшем s – v -пути. Перенесём все в одну сторону и получим выражение:

$$\forall (u, v) \in E : 0 \leq w_{uv} + d_u - d_v$$

□

Теперь, применяя эту теорию, давайте докажем лемму 2.2 о проталкивании потока вдоль кратчайшего пути.

Доказательство. После проталкивания потока вдоль кратчайшего пути, рёбра, которые мы могли добавить в остаточную сеть, это обратные к тем, что лежали на нем. А для них выполняется $d_v = d_u + w_{uv}$, тогда в силу того, что $w_{uv} = -w_{vu}$: $w_{vu} = d_u - d_v$, то есть $w_{vu} - d_v + d_u = 0$. Тогда рёбра, которые мы добавили, не ломают наш потенциал, а значит, по критерию его существования в остаточной сети нет циклов отрицательного веса. □

Тогда чтобы искать поток давайте каким-то образом изначально расставим потенциалы. И далее запускать Дейкстру с потенциалами на остаточной сети, пока найдётся s – t -путь в остаточной сети и пропускать вдоль него единицу потока. Однако внимательный слушатель может заметить, что при добавлении обратных рёбер потенциалы могут сломаться. Давайте как-то учиться это исправлять.

Лемма 4.3: Изменение потенциалов

В качестве потенциала нам подойдет потенциал, равный исходному + кратчайшее расстояние в графе с учётом корректировки.

Доказательство. Обозначим новый потенциал $\pi_v^* = \pi_v + d_v$, докажем, что он корректный. По свойствам кратчайших путей в исходном графе:

$$d_v \leq d_u + w_{uv} + \pi_u - \pi_v \Leftrightarrow 0 \leq w_{uv} + \pi_u + d_u - \pi_v - d_v = w_{uv} + \pi_u^* - \pi_v^*$$

При этом в граф могли добавиться лишь ребра обратные к тем, что лежат на кратчайшем пути, а для них выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} d_v = d_u + w_{uv} + \pi_u - \pi_v \\ w_{vu} = -w_{uv} \end{cases} \Rightarrow w_{vu} + \pi_v + d_v - \pi_u - d_u = 0 \geq 0$$

Тогда добавленные ребра не портят потенциал, а для тех, что были изначально в графе, всё осталось хорошо. Теорема доказана. $\square$

Для того, чтобы улучшить ваше понимание, давайте запишем схему нашего алгоритма.

1. Расставить потенциалы в исходном графе: изначально это кратчайшие расстояния от вершины s , если недостижима, но плевать.
2. Дейкстра по приведенным стоимостям рёбер $w_{uv}^* = w_{uv} + \pi_u - \pi_v \geq 0$ в остаточной сети G_f .
3. Обновить потенциалы до всех достижимых вершин: $\pi_u^* = \pi_u + d_u$
4. Протолкнуть поток вдоль кратчайшего пути с величиной $\delta = \min_{(u,v) \in P} c_{uv} - f_{uv}$.
5. Если в остаточной сети остался s - t -путь, то перейти к шагу 2.

Вопросы, замечания, предложения?

Кеки про МСМФ

1. Если вы свели задачу к МСМФ, то иногда стоит задуматься, а точно ли это оно и нельзя ли симулировать поиск быстрее.
2. Если у вас граф изначально без отрицательных рёбер или DAG, то расстановка потенциалов заметно упрощается.

Предложение 5.1: Выпуклость множества достижимых пар

Пусть допускаются вещественные значения потока. Если потокам x и y соответствуют пары

$$(|x|, \text{cost}(x)) \quad \text{и} \quad (|y|, \text{cost}(y)),$$

то для любого $\lambda \in [0, 1]$ поток

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

допустим и задаёт выпуклую комбинацию этих пар.

Доказательство. Ограничения потока линейны. Для любой внутренней вершины v имеем

$$\sum_u z_{uv} - \sum_w z_{vw} = \lambda \left(\sum_u x_{uv} - \sum_w x_{vw} \right) + (1 - \lambda) \left(\sum_u y_{uv} - \sum_w y_{vw} \right) = 0.$$

Для каждого ребра e из неравенств $0 \leq x_e, y_e \leq c_e$ следует

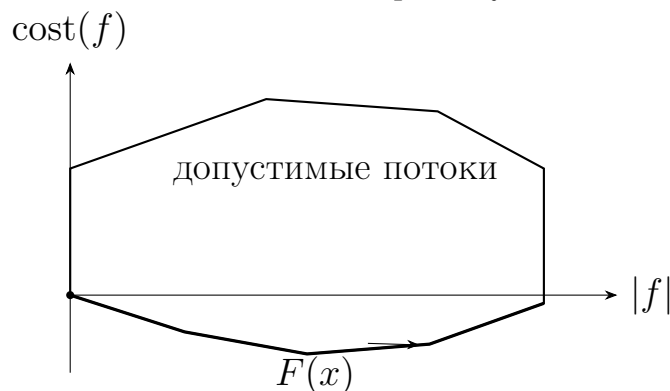
$$0 \leq z_e = \lambda x_e + (1 - \lambda)y_e \leq \lambda c_e + (1 - \lambda)c_e = c_e.$$

Значит, z — допустимый поток. Кроме того, величина и стоимость линейны:

$$|z| = \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|,$$

$$\text{cost}(z) = \lambda \text{cost}(x) + (1 - \lambda) \text{cost}(y).$$

Следовательно, множество достижимых пар выпукло.





Далее давайте порисуем на доске интересные вещи.