

Линейная алгебра. Семинар.

22 июля 2026 г.

Возводим матрички в степень

Задача 1. Пусть $F_0 = 0, F_1 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geq 2$. Найдите $F_n \bmod 10^9 + 7$ за $O(\log_2 n)$.

Задача 2. Пусть $A \in \text{Mat}_{n \times n}, dp[k] \in \text{Mat}_{n \times 1}$ и известно соотношение

$$dp[n] = A \cdot dp[n-1]$$

1. Вычислить $dp[k]$ за $O(n^3 \log k)$.
2. Применить к числам Фибоначчи
3. Дано число n , требуется посчитать количество строк из букв a, b, c, таких что количество букв a четно.
4. Рассмотрим последовательность из букв $\{A, B, C, D\}$. Буква A меняет настроение на противоположное, буква B делает настроение плохим, буква C делает настроение хорошим, а буква D не меняет настроение. За $O(\log n)$ найти количество строк длины n , которые можно прочесть и не потерять хорошее настроение.

Задача 3. Рассмотрим рекуррентную последовательность $\{x_i\}_{i=0}^\infty$. Пусть для нее выполнено соотношение:

$$\forall n \geq k : \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \dots \\ x_{n-k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \dots \\ x_{n-k} \end{pmatrix}, A \in \text{Mat}_{m \times m}(R)$$

1. Выведите рекуррентную формулу для последовательности $\{x_i\}$ в виде $x_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{n-i}$
2. Пусть $S_n = \sum_{i=0}^n x_i$. Научитесь вычислять S_n за $O(m^3 \log n)$

Задача 4. Дан ориентированный граф на n вершинах. Приходит q запросов формата:

- Даны вершины s, t, k . Нужно найти количество путей (не обязательно простых) из s в t , состоящих из k ребер.

Необходимая асимптотика (K — максимальное k в запросах):

1. $O(q \cdot n^3 \log K)$
2. $O(q \cdot n^2 \log K + n^3 \log K)$

Также решите задачу для количества путей длины $\leq k$ в каждом запросе.

СЛУ и Гаусс

Задача 5. Решить СЛУ:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - 6y = -2 \\ -2x + 7y + 2z = 9 \end{cases}$$

Задача 6. Можно ли получить $x^2 + 2x + 3$ как линейную комбинацию многочленов $x^2 + x$ и $x + 1$? Составить и решить соответствующую СЛУ.

Задача 7. Сколько есть способов получить $x^2 + 2x + 3$ как линейную комбинацию многочленов $x^2 + x, x + 1, 2x + 1$? А если к ним добавить многочлен $3x + 1$? Составить и решить соответствующие СЛУ.

Задача 8. Решить следующую систему линейных уравнений по модулю 5:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

Обратная

Задача 9. Пусть $A \in Mat_{2 \times 2}(R)$ и существует A^{-1} . Найти A^{-1} в общем виде.

Задача 10. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 11. Пусть $A \in Mat_{n \times n}(R)$ и существует A^{-1} . Найти A^{-1} за $O(n^3)$

Определитель

Задача 12. Найти определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 11 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Задача 13. Найти определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 14. Найти определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 15. Дана матрица $A \in Mat_{n \times n}(R)$. За $O(n^3)$ научиться считать ее определитель.

Задачки над Z_2

Задача 16. Найти базис подпространства

$$V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Лежит ли в нем вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? А вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Задача 17. Сколько различных чисел можно получить, если брать всевозможные ксоры чисел 3, 5, 6?

Задача 18. Какое максимальное число можно получить как ксор подмножества чисел 22, 13, 27, 7?

Задача 19. Пусть нам онлайн приходят векторы из Z_2^n . Если поддерживать базисные векторы (матрицу после прямого прохода Гаусса), то при помощи жадного алгоритма из предыдущей задачи мы можем за $O(\log^2 n)$ искать максимальное возможное число, представимое в виде ксора текущих чисел множества. Добавление нового числа при этом также занимает $O(\log^2 n)$ времени. Как оптимизировать ответ на запрос до $O(\log n)$ (время добавление при этом останется прежним)?

Задача 20. Пусть нам онлайн приходят числа, строго меньшие 2^m . Научитесь за $O(\log^2 m)$ на запрос добавлять новый элемент, после чего за $O(\log^2 m)$ на запрос искать

1. количество элементов $\leq x$, представимых в виде ксора чисел из текущего множества
2. k -е по возрастанию число, представимое в виде ксора чисел из текущего множества

Матрица Татта

Задача 21. Предъявите критерий существования совершенного паросочетания в графе (необязательно двудольном) через определитель специальной матрицы.

Теорема Кирхгофа

Задача 22. Дан неориентированный граф с n вершинами без петель и ребер, посчитайте по модулю количество остовных деревьев в нем. Асимптотика $O(n^3)$.

Задача 23. Решите предыдущую задачу, если могут быть кратные ребра.

Задача 24. Решите предыдущую задачу, если нужно посчитать количество минимальных по весу остовов.

Задача 25. Выведите формулу n^{n-2} для количества деревьев на n вершинах.

Задача 26. Дан неориентированный граф с n вершинами, могут кратные ребра и петли, посчитайте по модулю количество эйлеровых циклов в нем. Асимптотика $O(n^3)$.