

Потоки

Задачи отсортированы по возрастанию сложности; (*) — со звёздочкой.

Часть I. Обычные потоки

Считаем, что поток ищем алгоритмом Диница за $\mathcal{O}(V^2E)$. Взвешенные потоки искать не умеем.

Если не указано обратное, задачи решать надо за время поиска потока.

1. Вам дан максимальный поток f_e . У одного ребра пропускная способность выросла на 1. Как найти максимальный поток в новой сети за $\mathcal{O}(V + E)$?
2. Докажите, что алгоритм Форда–Фалкерсона («ищем дополняющий путь dfs-ом, пока можем») на графе с единичными пропускными способностями работает за $\mathcal{O}(VE)$
3. За вас нашли максимальный поток и сообщили f_e для всех рёбер. За $\mathcal{O}(V + E)$ найдите минимальный разрез с наименьшим возможным числом вершин в «левой доле» (со стороны истока).
4. Предъявите ориентированный граф с единичными пропускными способностями, в котором есть поток величины 1, максимальный поток равен 5, и при этом из данного потока нельзя увеличить величину, не используя обратные рёбра.
5. Дан неориентированный граф. Ориентируйте его рёбра так, чтобы максимальная исходящая степень была минимальна. Решения за (a) $\mathcal{O}(E^2 \log V)$ и (b) $\mathcal{O}(E^2)$.
6. В двудольном графе у каждой вершины неотрицательный вес. Найдите вершинное покрытие минимального веса и независимое множество максимального веса.
7. Часть вершин покрашена в красный, часть — в синий, остальные не покрашены. (a) Докажете оставшиеся так, чтобы число рёбер между разноцветными вершинами было минимально. (b*) Минимизируйте число вершин, у которых есть сосед другого цвета. (c*) У вершин веса w_v ; минимизируйте суммарный вес «граничных» вершин.
8. Даны n элементов. Поместить элемент i в первое множество стоит α_i , во второе — β_i ; за каждую пару (i, j) , оказавшуюся в разных множествах, штраф c_{ij} . Найдите минимальную стоимость разбиения.
9. Дана матрица $n \times m$, каждая клетка чёрная или белая. Перекрасить клетку в чёрный стоит B , в белый — W . Кроме того, за каждую пару соседних (по стороне) клеток разного цвета платится X . Минимизируйте суммарные траты.
10. Есть девочки, коты и собачки. Для каждой девочки известно, какие коты и собачки ей нравятся. Выдайте максимальному числу девочек по коту и собачке так, чтобы каждый котик и каждая собачка достались не более чем одной девочке, а каждой девочке — нравящиеся ей котик и собачка.
11. Есть n тем с полезностями c_i (возможно, отрицательными). Чтобы понять тему, нужно прочитать некоторые другие. Если темы образуют цикл зависимостей, их все можно прочитать в любом порядке. Максимизируйте суммарную полезность выбранного (замкнутого по зависимостям) множества тем.
12. Есть n инструментов (цена a_i) и m работ (гонорар b_j); для каждой работы задан список нужных инструментов, инструменты не расходуются. Купите инструменты и выполните

работы так, чтобы доход $\sum b_j - \sum a_i$ был максимален.

13. Даны перестановки a, b длины n . Операция: выбрать значение i ; пусть $a_x = i, b_y = i$; поменять местами $a_i \leftrightarrow a_x$ и $b_i \leftrightarrow b_y$. Отсортируйте обе перестановки по возрастанию за минимум операций. $1 \leq n \leq 3000$.
14. Дан граф и вершины s, t . Проверьте, единственен ли минимальный $s-t$ разрез.
15. Дан плоский граф на n вершинах (s, t на одной грани). (1) Найдите минимальный разрез за $\mathcal{O}(n \log n)$. (2) Восстановите максимальный поток за $\mathcal{O}(n \log n)$.

Часть II. Взвешенные потоки

У рёбер есть стоимости w_e ; ищем поток минимальной суммарной стоимости.

Если не указано обратное, задачи решать надо за время поиска *mincost* потока.

1. В графе только рёбра с $w_e \geq 1$ и рёбра с $w_e = -1$, причём все отрицательные рёбра выходят из одной вершины v . Какими потенциалами убрать отрицательные рёбра? (b*) А если есть ещё рёбра $w_e = 0$?
2. Дороги образуют ориентированный граф; у дороги длина w_i и пропускная способность u_i . Дороги соединяют здания, в каждом здании может быть завод или магазин. i -й завод выпускает A_i единиц товара, j -й магазин продаёт B_j . Составьте план доставки, в котором каждый магазин получает достаточное количество товара и по i -й дороге доставляется $f_i \leq u_i$ товара так, чтобы $\sum f_i w_i$ была минимальна.
3. Есть k автоматов и n заданий. Про каждое известно, когда его начать, когда закончить и его стоимость. Каждый автомат в каждый момент выполняет не более одного задания. Выполните задания максимальной суммарной стоимости. (a) $\mathcal{O}(kn^2)$; (b) $\mathcal{O}(kn \log n)$; (c*) уменьшите число вершин вдвое.
4. В двудольном графе у вершин неотрицательные веса; вес ребра равен сумме весов его концов. Найдите паросочетание максимального веса за (a) $\mathcal{O}(V^3)$ и (b) $\mathcal{O}(VE)$.
5. Дан массив; выберите в нём k возрастающих непересекающихся (по индексам) подпоследовательностей максимальной суммарной длины. Сведите к *mincost*-потоку; оцените время работы с потенциалами.
6. Даны числа f_e и c_e . Найдите поток $\langle f^*, c^* \rangle$ из s в t такой, что
 - (a) $\sum_e |f_e^* - f_e| \rightarrow \min, \quad \forall e \ c_e^* = +\infty$;
 - (b) $\sum_e |f_e^* - f_e| \rightarrow \min, \quad \forall e \ c_e^* = c_e$;
 - (c) $\sum_e (|f_e^* - f_e| + |c_e^* - c_e|) \rightarrow \min$.
7. В графе у каждого ребра есть стоимость w_e , а также числа $l_e \leq r_e$. LR-циркуляцией в этом графе называется такой поток f_e (в каждую вершину втекает столько же, сколько и вытекает), что $l_e \leq f_e \leq r_e$. Стоимость циркуляции это $\sum_e f_e \cdot w_e$.
Найти LR-циркуляцию минимальной стоимости.